Anwendungen mit SAS: Direkt aus der Praxis!

Block 1

Deskriptive Statistik und Simulation von Zufallsvariablen

Fachhochschule Koblenz
Fachbereich Mathematik und Technik

Dr. Denise Rey

28. November 2008

Inhalt

Warum muss man Daten analysieren?

Beispiel 1. Faire Muenze

(a) 1111111111111111111111111

(b) 10101010101010101010101010

(c) 10010011100100111001001110010011

(d) 011011100101110111100010011010

(e) 101110010111111001000000110101001

String: $x_1, x_2, \ldots, x_n$

Laengen: 25,26,32,30,32

Warum muss man Daten analysieren?

Beispiel 1. Faire Muenze
Ist die Muenze fair? Wir schauen uns die relative Haufigkeiten von 1 und 0 an:

$$f_0 := \frac{\#\{i : x_i = 0\}}{n} \tag{1}$$

$$f_1 := \frac{\#\{i : x_i = 1\}}{n} \tag{2}$$

Faire Muenze

$$f_0 \approx 1/2 \approx f_1 \tag{3}$$

Reicht der Begriff der fairen Muenze aus um die Zufaelligkeit zu definieren?

Warum muss man Daten analysieren?

Beispiel 1. Faire Muenze

(a) 11 11 11 11 11 11 11 11 11 11 11 11 11 11 11 11 11 11 11 11 11 11 11 11 (25-1 Bloecke)

(b) 10 01 10 01 10 01 10 01 10 01 10 01 10 01 10 (25 Bloecke)

(c) 10 00 01 10 00 01 11 11 10 00 01 10 00 01 11 11 10 00 01 10 00 01 11 11 10 00 01 10 00 01 11 (31 Bloecke)

(d) 01 11 10 01 11 11 10 00 01 10 01 11 11 10 01 11 11 11 10 00 00 01 10 00 01 11 10 01 10 (29 Bloecke)

(e) 10 01 11 11 10 00 01 10 01 11 11 11 11 10 00 01 10 00 00 00 00 00 01 11 10 01 10 01 10 00 01 (31 Bloecke)

Warum muss man Daten analysieren?

Test auf Zufaelligkeit der Ordnung 1
Falls die relative Haeufigkeiten von 0 und 1 (approximativ) 1/2 sind, dann ist der Test bestanden:

$$f_0 := \frac{\#\{i : x_i = 0\}}{n} \approx \frac{1}{2} \approx f_1 := \frac{\#\{i : x_i = 1\}}{n}.$$

Test auf Zufaelligkeit der Ordnung 2
Falls die relative Haeufigkeiten der Bloecke 00,01,10,11 (approximativ) 1/4 sind, dann ist der Test bestanden:

$$f_{00} = \frac{\#\{i : (x_i, x_{i+1}) = (0,0)\}}{n-1}, \quad f_{01} = \frac{\#\{i : (x_i, x_{i+1}) = (0,1)\}}{n-1}$$

$$f_{10} = \frac{\#\{i : (x_i, x_{i+1}) = (1,0)\}}{n-1}, \quad f_{11} = \frac{\#\{i : (x_i, x_{i+1}) = (1,1)\}}{n-1}$$

Warum muss man Daten analysieren?

Definition 1 Die Aequipartition Eigenschaft
Ein (langer) string erfuellt die Aequipartition Eigenschaft wenn er die Tests auf Zufaelligkeit aller Ordnungen k=1,2,3,... besteht.

Test Ordnung 1:
a durchgefallen

Test Ordnung 2:
a,b durchgefallen

Test Ordnung 8:
a,b,c,durchgefallen
(c) 10010011 10010011 10010011 10010011

Anwendungen mit SAS. Denise Rey.

Warum muss man Daten analysieren?

Was ist mit (d)?
(d) 0 1 10 11 100 101 110 111 1000 1001 1010
Champernowne Number: 0.1234567891011121314

- (d) als unendliche Zahl besteht Tests der Zufaelligkeit aller Ordnungen

- (d) erfuellt nicht das Kriterium der *Unvorhersagbarkeit*.

Was ist mit (e)?
(e) Ist eine Pseudo Zufallszahl generiert mit dem PC.

Warum muss man Daten analysieren?

Wann ist ein zufaelliger String zufaellig?

- vM von Mises Kriterium: Haeufigkeiten von 0 und 1 sind stabil oder die Aequipartition Eigenschaft.

- K Kolmogorov Kriterium: Der String ist komplex (z.B. unvorhersagbar).

- ML Martin Lf Kriterium: String ist nicht typisch.

In der Literatur existieren viele statistische Tests auf Zufaelligkeit von Strings bzw. Stichproben.

Wahrscheinlichkeit, Zufaellige Variable

Definition 2 Das Zufaellige Experiment

Ein zufaelliges Experiment liegt vor, wenn

1. auch unter identischen Bedingungen durchgefuehrte Wiederholungen ein und desselben Experiments unterschiedliche Ergebnisse aufweisen koennen
2. die Menge aller moeglichen Ergebnisse des Experiments ist bekannt.

Das mathematische Modell eines zufaelligen Experimentes ist der Wahrscheinlichkeitsraum

$$(\Omega, \mathfrak{B}, P)$$

wobei
$\omega \in \Omega$ ein Elementarereignis ist (sample point)
$B \subset \mathfrak{B}$ ein zusammengestelltes Ereignis ist (random events)
$P(B)$ die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses ist

Wahrscheinlichkeit, Zufaellige Variable

Definition 3 Die Wahrscheinlichkeit
Sei $(\Omega, \mathfrak{B}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Die Wahrscheinlichkeit ist eine Funktion $P : \mathfrak{B} \to [0, 1]$ so dass
1. $P(\Omega) = 1$
2. Fuer jede disjunkte Reihe $A_1, A_2, \ldots$ haben wir
$P(\bigcup_i A_i) = \sum_i P(A_i)$

Definition 4 Bedingte Wahrscheinlichkeit
Fuer zwei Untermengen im Stichprobenraum $A, B \subset \Omega$ ist die Wahrscheinlichkeit von A, gegeben B:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \tag{4}$$

Definition 5 Unabhaengigkeit
Zwei Ereignisse A und B heissen unabhaengig falls

$$P(A|B) = P(A) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B) \tag{5}$$

Mathematica Demos

Wahrscheinlichkeit, Zufaellige Variable

Definition 6 Zufallsvariable
Eine Zufallsvariable X ist eine messbare Funktion von einem Wahrscheinlichkeitsraum in einen Messraum.

$$X : (\Omega, \mathfrak{B}, P) \to (\Omega', \mathfrak{B}').$$

Eine reele Zufallsvariable ist eine messbare Funktion

$$X : \Omega \ni \omega \to X(\omega) \in \mathbb{R}$$

und

$$X^{-1}((\infty, x]) \in \mathfrak{B}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Definition 7 Verteilungsfunktion
Eine reele Zufallsvariable X ist durch die Verteilungsfunktion definiert $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ $F_X(x) = P(\omega | X(\omega) \leq x), \quad x \in \mathbb{R}.$

Wahrscheinlichkeit, Zufaellige Variable

Definition 8 Stetige Zufallsvariable
Eine (reele) Zufallsvariable X heisst (absolut) stetige Zufallsvariable wenn es eine nichtnegative Dichtefunktion $f \geq 0$ gibt so dass

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$$

Definition 9 Diskrete Zufallsvariable
Eine diskrete Zufallsvariable X kann nur eindliche oder zaehlbare Anzahl an Auspraegungen haben $x_1, x_2, \ldots \in \mathbb{R}$ (oder R^d) mit einer positiven Wahrscheinlichkeit und die Verteilungsfunktion ist definiert folgendeweise

$$p_i := P(X = x_i), \quad \sum_i p_i = 1.$$

Bekannte Verteilungen

Bekannte stetige Verteilungen

Name	Notation	f(x)	$x \in$	Param.
Uniform	$U(\alpha, \beta)$	$\frac{1}{\beta - \alpha}$	$[\alpha, \beta]$	$\alpha < \beta$
Normal	$N(\mu, \sigma^2)$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{(2\pi)}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$	$\mathbb{R}$	$\sigma > 0, \mu \in \mathbb{R}$
Exponential	$Exp(\lambda)$	$\lambda e^{-\lambda x}$	$\mathbb{R}_+$	$\lambda > 0$

Bekannte Verteilungen

Bekannte diskrete Verteilungen

Name	**Notation**	**P(X=x)**	$x \in$	**Param.**
Bernoulli	$Be(p)$	$p^x(1-p)^{1-x}$	$\{0,1\}$	$0 \leq p \leq 1$
Binomial	$Bi(n,p)$	$\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$	$\{0,1,\ldots,n\}$	$0 \leq p \leq 1, n \in \mathbb{N}$
Poisson	$Po(\lambda)$	$e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x}$	$\mathbb{N}$	$\lambda > 0$
Geometric	$Ge(p)$	$p(1-p)^{x-1}$	$\{1,2,\ldots\}$	$0 \leq p \leq 1$

Bekannte Verteilungen

Wie beschreiben wir Daten?

Lagemasse: Mittelwert, Median, Quantile.
Streuungsmasse: Varianz, Standardabweichung, Range, Interquartile Range, Variationskoeffizient.
Form: Schiefe, Woelbung.

Chebyshev's Law
Wenigstens $1-(1/k^2)$ der Beobachtungen einer Stichprobe befinden sich innerhalb k Standardabweichungen s Entfernung vom Stichprobenmittelwert $\bar{x}$.

Bekannte Verteilungen

Erwartung und Varianzen fuer bekannte Verteilungen

Vert.	$E[X]$	$Var[X]$
$Be(p)$	p	$p(1-p)$
$Bi(n,p)$	np	$np(1-p)$
$Po(\lambda)$	λ	λ
$Ge(p)$	$1/p$	$(1-p)/p^2$
$U(\alpha,\beta)$	$(\alpha+\beta)/2$	$(\beta-\alpha)^2/12$
$Exp(\lambda)$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$
$No(\mu,\sigma^2)$	μ	σ^2

Pseudo Zufallszahlen

Muenzen, Wuerfel, mechanische und elektronische Geraete erzeugen reine zufaellige Ergebnisse. Diese sind nicht optimal aus den Gruenden

a. Zu langsam
b. Keine Reproduzierbarkeit der Beobachtungen moeglich
c. Unabhaengigkeit wurde in den Beobachtungen bemerkt

Die Zufallszahlen erzeugt von dem Computer basieren auf deterministische Algorithmen und heissen deswegen **Pseudo Zufallszahlen**. Nichtsdestotrotz, die Pseudo Zufallszahlen besitzen die statistische Eigenschaften von reinen zufaelligen Zahlen (z.B. Komplexitaet oder Stabilitaet der relativen Haeufigkeiten von 0 und 1 in einem binaeren String).

Pseudo Zufallszahlen

Definition 10 Der Lineare Congruentiale Zufallsgenerator

$$X_{i+1} = a * X_i + c(\text{mod m})$$

Bezeichnungen:

X_0 Seed

a Multiplikator (multiplier)

c Inkrement

m Modulus.

Definition 11 Pseuo Zufallszahlen

$$U_i = \frac{X_i}{m}$$

In SAS: $m = 2^{31} - 1$, $a = 397204094$.

SAS Simulation U(alpha,beta).sas

SAS Seed.sas

Simulation von Zufallsvariablen via Inverse Methode

Sei X eine Zufallsvariable mit der Verteilungsfunktion F. F als nicht fallende Funktion hat die verallgemeinerte Inverse

$$F^{-1} : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad F^{-1}(y) = \inf\{x : F(x) \geq y\}, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

Satz 12 Sei $U \sim (0,1)$. Dann $X := F^{-1}(U)$ hat die Verteilungsfunktion F.
Beweis. F ist invertierbar und $P(U \leq u) = u$. Dann

$$P(X \leq x) = P(F^{-1}(U) \leq x) = P(U \leq F(x)) = F(x).$$

Definition 13 Algorithm Inverse Methode
1. Generiere eine Zufallsvariable $U \sim U(0,1)$.
2. Erzeuge $X = F^{-1}(U)$.

Simulation von Zufallsvariablen via Inverse Methode

Beispiel. Exponential verteilte Zufallsvariable
$X \sim Exp(\lambda)$ mit der Dichtefunktion:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & Rest \end{cases}$$

Die Verteilungsfunktion ist dann:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = (-e^{-\lambda t})\Big|_0^x = 1 - e^{-\lambda x}.$$

Die Inverse der Verteilungsfunktion ist dann:

$$U = F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \Rightarrow e^{-\lambda x} = 1 - U \Rightarrow X = \frac{-ln(1-U)}{\lambda} \Rightarrow$$

$$F^{-1}(u) = \frac{-ln(1-U)}{\lambda}.$$

Simulation von Zufallsvariablen via Inverse Methode

Beispiel. Exponential verteilte Zufallsvariable

Satz 14 $U \sim U(0,1) \Rightarrow 1 - U \sim U(0,1)$.

Beweis.

$$F(x) = P(1-U \leq x) = P(U \geq 1-x) = 1-P(U \leq 1-x) = 1-1+x = x.$$

Algorithm Generierung Exponentialverteilung

1. Generiere $U \sim U(0,1)$.
2. Erzeuge $X = -\frac{1}{\lambda}U \sim Exp(\lambda)$.

Inverse Mehode Exponential.sas

SAS Simulation Exp(lambda).sas

Simulation von Zufallsvariablen via Inverse Methode

Beispiel. Bernoulli Verteilung
Sei $X \sim Be(p)$

$$P(X = x) = p^x (1 - p)^{1-x}, \quad x = 0, 1$$

Algorithm Generierung Bernoulli
1. Generiere $U \sim U(0, 1)$
2. Falls $U \leq p$ dann $X := 1$, sonst $X := 0$.

Simulation von Zufallsvariablen via Inverse Methode

Beispiel. Binomial Verteilung
Sei $X \sim Bi(n,p)$.

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{1-x}, \quad x = 0, 1, \ldots, n.$$

Falls $X_i \sim Be(p)$, $1 \leq i \leq n$ i.i.d. dann $X = \sum_{i=1}^n X_i \sim Bi(n,p)$.

Algorithm Generierung Binomial
1. Generiere $X_i \sim Be(p)$, $1 \leq i \leq n$.
2. Erzeuge $X = \sum_{i=1}^n X_i \sim Bi(n,p)$.

Fuer n gross (in SAS falls $n > 50$) wird eine Approximation mit der Normalverteilung benutzt:

$$P(X_{Bi(n,p)} \leq x) \to N(np, np(1-p)).$$

Inverse Methode Bernoulli & Binomial.sas

SAS Simulation Bernoulli & Discrete.sas

Simulation von Zufallsvariablen via Annehmen-Verwerfen Methode

Zu benutzen wenn die Inverse der Verteilungsfunktion analytisch schwer oder gar nicht zu erzeugen ist.
Sei F eine Verteilungsfunktion mit Dichte f. Wir nehmen an:
- f ist in $[a, b]$ beschraenkt, $c = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$
- $f(x) = 0, \forall x \notin [a, b]$

Algorithm

1. Generiere $X \sim U(a, b)$
2. Generiere $Y \sim U(0, c)$ unabhaengig von X.
3. Falls $Y \leq f(X)$, dann $Z := X$. Sonst, gehe zu Schritt 1.

Simulation von Zufallsvariablen via Annehmen-Verwerfen Methode

Verallgemeinertes Algorithm Annehmen-Verwerfen
Sei g eine Dichte so dass $\Phi(x) = Cg(x)$ die Dichtefunktion majorisiert i.e. $\Phi(x) \geq f(x) \forall x$. g wird *vorgeschlagene* (proposal) Dichte genannt.
1. Generiere $X \sim g(x)$.
2. Generiere $U \sim U(0,1)$ unabhaengig von X.
3. Falls $U \leq f(X)/(Cg(X))$, dann $Z := X$. Sonst, gehe zu Schritt 1.

Simulation von Zufallsvariablen via Annehmen-Verwerfen Methode

Eigenschaften:

1. Mann soll von der Dichte g einfach Zufallsvariablen generieren koennen.
2. Die Effizienz dieser Prozedur wird gemessen in $1/C$. Die Effizienz gross fuer $C \approx 1$ (dies passiert wenn $g(x)$ in der Naehe von $f(x)$ ist.

Simulation von Zufallsvariablen via Annehmen-Verwerfen Methode

Beispiel. Die Target Dichte sei

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Wir nehmen $g(x) = 1$, $0 \leq x \leq 1$ und $C = 2$.
Dann $f(x)/Cg(x) = x$.

Algorithm 1. Generiere $X \sim U(0,1)$
2. Generiere $U \sim U(0,1)$ unabhaengig von X.
3. Falls $U \leq X$ dann erzeuge $Z := X$. Sonst, gehe zu Schritt 1.

Acceptance Region.sas

SAS Simulation N(mu,sigma).sas

SAS Simulation Po(lambda).sas

SAS Simulation Bivariate Normal.sas

Simulation von Poisson Prozessen

Definition 15 Der Stochastische Prozess

Unter einem stochastichen Prozess mit dem Parameterraum T und dem Zustandsraum E versteht man eine Familie von Zufallsvariablen $(X_t)_{t \in T}$ wobei E die Menge aller Zustaende (Werte) bezeichnet die die X_t fuer alle $t \in T$ annehmen koennte.

Aufteilung der stochastischen Prozesse:
- T, E endlich oder abzaehlbar unendlich dann diskreter stochatischer Prozess mit diskreter Zeit
- T endlich oder abzaehlbar unendlich und E Intervall dann stetiger Prozess mit diskreter Zeit
- T Intervall und E endlich oder abzaehlbar unendlich dann diskreter Prozess mit stetiger Zeit
- T, E Intervalle dann stetiger stochastischer Prozess mit stetiger Zeit.

Simulation von Poisson Prozessen

Der Poisson Prozess
Seien $T_1, T_2, \ldots,\ T_i \in [0, T]$ Zeitpunkte des Eintreffens (arrival times). Ein Zaehlprozess ist definiert durch $N_t := sup\{k : T_k \leq t\}$ die Anzahl der Treffer im Zeitintervall $[0, t]$.

Definition 16 Homogener Poisson Prozess
Ein Zaehlprozess $(N_t)_{t \geq 0}$ heisst Poisson Prozess mit der Intensitaet $\lambda > 0$ falls
1. $N(0) = 0$
2. $(N_t)_{t \geq 0}$ ist ein stochastischer Prozess mit unabhaengigen Zuwaechsen
3. Die Zuwaechse des Prozesses in einem Intervall $[s, t]$ genuegen einer Poissonverteilung $Po(\lambda(t - s))$.

Simulation von Poisson Prozessen

Beispiele von Poisson Prozessen:

1. Anzahl der Kunden, die je Tag einen bestimmten Dienstleistungsbettrieb aufsuchen
2. Anzahl der Pflanzen die sich in einem fixierten Areal befinden
3. Anzahl von Partikeln die je Zeiteinheit durch eine radioaktive Substanz emittiert werden

Simulation von Poisson Prozessen

Eigenschaften

1. λ ist die Rate des Eintreffens: $N_t \sim Po(\lambda t) \Rightarrow E[N_t] = \lambda t$.
2. $P(N_t \geq n) = P(T_n \leq t)$
3. Alternative Definition: Ein Poisson Prozesses N_t mit Intensitaet λ ist gegeben wenn und nur wenn die Intervalle $A_1 = T_1$, $A_2 = T_2 - T_1$ unabhaengige und $Exp(\lambda)$ verteilte Zufallsvariablen sind.

Algorithm zur Simulation von einem Poisson Prozess in dem Intervall $[0, T]$

1. Setze $T_0 = 0$, $n = 1$.
2. Generiere eine unabhaengige Zufallsvariable $U_n \sim U(0, 1)$
3. Setze $T_n = T_{n-1} - \frac{1}{\lambda}\log(U_n)$ und definiere ein Eintreffen.
4. Falls $T_n > T$ dann Stop. Sonst, setze $n := n + 1$ und gehe zu Schritt 2.

Poisson Process.sas

Simulation von Markov Ketten

Definition 17 Markov Process
Ein stochastischer Prozess $\{X_0, X_1, \ldots\}$ mit diskreter Zeit und mit dem Zustandsraum $\mathbb{Z} : \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$heisst *Markovsche Kette mit diskreter Zeit* falls die *Markov Eigenschaft* eingehalten wird $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*$ und $\forall\ i_0, i_1, \ldots, i_n$ mit $i_k \in \mathbb{Z}$ gilt folgende Beziehung:

$$P(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n, \ldots, X_1 = i_1, X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n).$$

Simulation von Markov Ketten

Definition 18 Uebergangswahrscheinlichkeiten

$$p_{i,j}(n) := P(X_{n+1} = j | X_n = i)$$

Definition 19 Homogene Markov Kette

$$p_{i,j}(n) = p(i,j), \quad \forall n = 0, 1, 2, \ldots$$

Definition 20 Anfangsverteilung einer Markov Kette

$$\pi^{(0)} := \{P(X_0 = i), i \in \mathbb{Z}\}$$

Bei gegebener Anfangsverteilung $\pi^{(0)}$ und bekannter Matrix der Uebergangswahrscheinlichkeiten $P = p(i,j)_{i,j \in \mathbb{Z}}$ ist die Markovsche Kette vollstaending bestimmt. Es lassen sich alle n-dimensionalen Verteilungen berechnen:

$$P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_n = i_n) = \pi_{i_0}^{(0)} \cdot p(i_0, i_1) \cdots p(i_{n-1}, i_n).$$

Simulation von Markov Ketten

Gegeben eine Anfangsverteilung $\pi^{(0)}$ und eine Uebergangswahrscheinlichkeitsmatrix P gilt der Algorithmus fuer die Simulation von einer Markov Kette $X_0, X_1, \ldots$:

Algorithm Simulation Markov Ketten

1. Simuliere $X_0 \sim \pi^{(0)}$. Setze $n = 0$.
2. Simuliere X_{t+1} anhand der Verteilung der entsprechenden $x_t = i_t$ Reihe der Matrix P, $p(i_t j), j \in \mathbb{Z}$
3. Setze $t = t + 1$ und gehe zu Schritt 2.

Simulation von Markov Ketten

Simulation Random Walk

$(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$, $X_t \in \mathbb{Z}$.

$$p(i,i+1) = p \quad p(i,i-1)) = q = 1-p, \quad \forall i \in \mathbb{Z}$$
$$P(X_0 = 0) = 1 \Rightarrow \pi^0.$$

Algorithm

1. Sei $X_0 = 0$, $n = 0$
2. Sei $I_t \sim Be(p)$. Dann die Markov Kette ist erzeugt durch $X_{t+1} = X_t + 2 * I_t - 2$, $t \in \mathbb{Z}^*$.

Markov Random Walk Process.sas

Weitere wichtige Themen im Bereich Simulationen:

- Zufallsvektoren mit einer gegebenen Kovarianzstruktur
- Simulation und Optimierung
- Markov Chain Monte Carlo (MCMC)

Einsatzbereiche von Simulationen:

- Computersimulationen, Computerspiele
- Traffic Systems
- Produktionslinien
- Wettersimulationen
- Katastrophensimulationen

Literatur

1. Introductory Statistics and Random Phenomena. Manfred Denker et al. Birkhaeuser Boston. (1998)
2. Simulation and the Monte Carlo Method. Reuven Y. Rubinstein et al. Wiley Series in Probability and statistics. (2008)
3. Mathematica www.wolfram.com